Curso 0,
Facultad de Ciencias.

Universidad de Granada

Módulos de Matemáticas

1. Módulo: Funciones elementales
2. Módulo: Continuidad, Límites y Derivación.
3. Módulo: Cálculo integral.

Septiembre 2009

Índice general

Capítulo 1

Módulos de Análisis Matemático

1.1. Módulo: Funciones elementales

Sumario

Es sabido que todo elemento de la naturaleza es composición de otros más elementales llamados átomos. Cuando tratamos de relacionar dos magnitudes solemos recurrir a unos artificios matemáticos llamados funciones. Pues bien, toda función también puede verse como composición de unas pocas funciones que llamamos funciones elementales. El objetivo de este módulo es el el estudio de estas funciones elementales. El contenido completo de este módulo se articula de la siguiente manera:

I.1 Aplicaciones

I.2 Funciones. Gráficas. Operaciones

I.2 Funciones racionales.

I.3 Función logaritmo. Función exponencial.

I.4 Funciones seno, coseno y tangente.

I.5 Otras funciones trigonométricas.

I.6 Identidades trigonométricas.

I.7 Funciones definidas a trozos. Función valor absoluto.

1.8 Relación de Ejercicios.

1.1.1. Aplicaciones

Dados dos conjuntos A y B se dice que los elementos de A y de B están relacionadsos mediante una **aplicación entre A y B** si a cada uno de los elementos del conjunto A le corresponde un único elemento del conjunto B. Este hecho suele notarse

$$f : A \longrightarrow B.$$

Al conjunto A se le suele llamar **dominio de la aplicación** f y al conjunto B **conjunto final de la aplicación** f. Al conjunto

$$\{y \in \mathbb{R};\ \text{existe}\ \ x \in A,\ \ \text{tal que}\ \ y = f(x)\},$$

se le denomina por **conjunto imagen ó recorrido de** f, y suele representarse por $f(A)$.

Una aplicación viene determinada por

1. su dominio
2. el cojunto donde toma valores o conjunto final, y
3. la ley de correspondencia, $x \longmapsto f(x)$.

Se dice que una aplicación $f : A \longrightarrow B$ es

1. **inyectiva** si, a cada dos elementos distintos del dominio les corresponden dos imágenes distintas.
2. **sobreyectiva** si el conjunto final coincide con su recorrido,
3. **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

Si $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación inyectiva, a la aplicación cuyo dominio es $f(A)$, cuyo conjunto final es A y cuya ley de correspondencia viene definida por $f(x) \longmapsto x$ se le denomina **aplicación inversa** de f y se representa por f^{-1}. Obsérvese que dicha aplicación inversa $f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$ es una aplicación biyectiva.

1.1.2. Funciones reales de variable real.

Llamaremos **función real de variable real** a toda aplicación definida en un subconjunto de números reales y con valores en $\mathbb{R}$, esto es, es a toda aplicación $f : A \longrightarrow B$, donde A y B son subconjuntos no vacíos de números reales.

Se dice que una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es

1. **creciente** en A si siempre que $x, y \in A$ con $x < y$, entonces $f(x) \leq f(y)$.

2. **estrictamente creciente** en A si siempre que $x, y \in A$ con $x < y$, entonces $f(x) < f(y)$.

3. **decreciente** en A si siempre que $x, y \in A$ con $x < y$, entonces $f(x) \geq f(y)$.

4. **estrictamente decreciente** en A si siempre que $x, y \in A$ con $x < y$, entonces $f(x) > f(y)$.

5. **monótona** (resp. **estrictamente monótona**) en A si es creciente o decreciente (resp. estrictamente creciente o decreciente).

6. **par** (resp. **impar**) si, para cada $x \in A$, se verifica que $-x \in A$ y que $f(x) = f(-x)$ (resp. $f(x) = -f(-x)$).

7. **periódica** si, para cada $x \in A$, se verifica que existe $T \in \mathbb{R}$ tal que $x + T \in A$ y que $f(x) = f(x + T)$. En tal caso al número T se le denomina **período** de la función f.

8. está acotada si existen dos números reales m y M tales que $m \leq f(x) \leq M$.

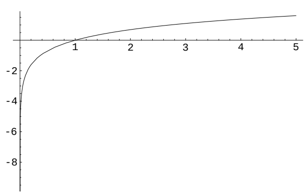
Gráfica de una función

En ocasiones resulta útil tener una "imagen fotográfica"de las funciones, esto se consigue mediante la **gráfica** de dicha función. Dada una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se define la gráfica de f, como el conjunto

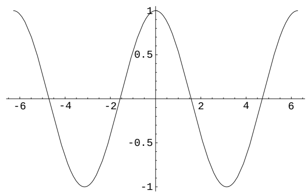
$$Graf(f) : \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ y = f(x),\ x \in A\}.$$

Es claro que el conjunto $Graf(f)$ es un subconjunto del producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que notaremos por $\mathbb{R}^2$. Al igual que usamos como representación gráfica de $\mathbb{R}$ la recta real, podremos usar el plano como representación gráfica del conjunto $\mathbb{R}^2$ y, por ende, la gráfica de una función real de variable real podrá representarse como un subconjunto de éste.

La idea que ahora queremos resaltar es que la forma de la gráfica revela muchas de las propiedades de la función correspondiente. Así, por ejemplo, si una función es creciente, su gráfica será ascendente,



Si está acotada por -1 y por 1, su gráfica está contenida en una banda horizontal de anchura 2,



Además de la monotonía y la acotación, la sola visión de la gráfica nos indicará otras propiedades como su continuidad, su derivabilidad, existencia de extremos, etc.

Operaciones con funciones.

En primer lugar hacemos notar que dadas dos funciones fy g definidas sobre un mismo subconjunto de números reales A, se pueden definir las siguientes funciones:

1. **Función suma**: $f+g$.

   La función suma es una nueva función $f+g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in A$, por
   $$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

2. **Función producto**: $f.g$:

   La función producto es una nueva función, $f.g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in A$, por
   $$f.g(x) = f(x)g(x).$$

   Si $0 \notin g(A)$, definimos la **función cociente** , f/g, como la función
   $$f/fgA \longrightarrow \mathbb{R},$$
   dada, para cada $x \in A$, por
   $$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

1.1.3. Funciones racionales

Veamos algunos ejemplos importantes de funciones reales de variable real.

1. **Función identidad**

Dada A un subconjunto de números reales, se define la función identidad en A, I_A, como aquella función $I_A : A \longrightarrow \mathbb{R}$ que viene definida por

$$I_A(x) = x, \ \forall x \in A.$$

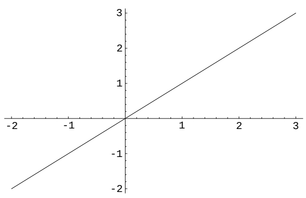
Dicha función es estrictamente creciente y su gráfica

$$Graf(I_A) = \{(x, x); \ x \in A\}.$$

es un subconjunto de la diagonal principal

$$D := \{(x, x); \ x \in \mathbb{A}\}.$$

Si $A = [-2, 3]$, entonces su gráfica puede ser representada por



2. **Funciones constantes**

Dada A un subconjunto de números reales y dado $a \in \mathbb{R}$, se define la función **constante** restringida al conjunto A, C_a, como la función $C_a : A \longrightarrow \mathbb{R}$ que viene definida por

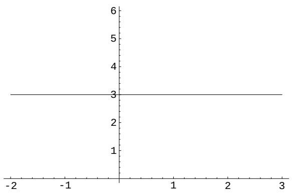
$$C_a(x) = a, \quad \forall x \in A.$$

La gráfica de dicha función

$$Graf(C_a) = \{(x, a); \ x \in \mathbb{R}\}$$

puede verse como un subconjunto de la recta horizontal $y = a$:

Si $A = [-2, 3]$ y $a = 3$, entonces su gráfica puede ser representada por

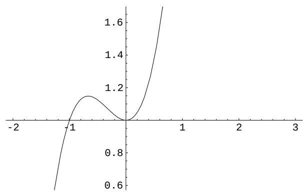


3. **Funciones polinómicas**

Una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice ser **polinómica** si existen $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ números reales tales que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ para cada $x \in A$. El coeficiente a_0 hace que su gráfica suba ó baje. Estas funciones han sido generadas mediante sumas y productos de la identidad y de las funciones constantes.

La función identidad y toda función constante son los ejemplos más sencillos de funciones polinómicas.

Si $A = [-2, 3]$ y $f(x) = x^3 + x^2 + 1$, entonces la gráfica de la función polinómica f puede ser representada por la siguiente figura.



Entre las funciones polinómicas más destacables se encuentran las

a) **Afines**: Aquellas cuya imagen nos viene dada mediante un polinomio de primer grado, esto es, $f(x) = ax + b$. Su gráfica es una recta y por tanto bastan dos puntos para determinarla. Si $a \neq 0$ su dominio y su recorrido coincide con $\mathbb{R}$

b) **Parabólicas**: Aquellas cuya imagen nos viene dada mediante un polinomio de segundo grado, esto es, $f(x) = ax2 + bx + c$. Su gráfica es una parábola y su dominio es todo $\mathbb{R}$. El coeficiente a determina que la curva sea más o menos abierta y su signo, que la parábola tenga las ramas hacia arriba ($a > 0$) ó hacia abajo ($a < 0$). El coeficiente b desplaza la gráfica hacia la derecha ($b < 0$) ó hacia la izquierda ($b > 0$). El vértice es el punto $(-b/2a, f(-b/2a)$

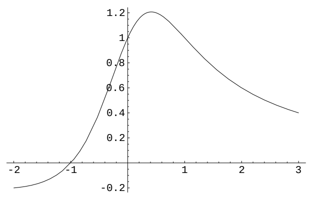
4. **Funciones racionales**

Una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice ser **racional** si existen sendas funciones polinómicas f_1 y f_2, con $f_2(x) \neq 0$, para cada $x \in A$ y tales que, para cada $x \in A$

$$f(x) = f_1(x)/f_2(x).$$

Es claro que todos los ejemplos anteriores (identidad, constantes y polinómicas) son funciones racionales. La gráfica de una función racional puede ser muy variada.

Si $A = [-2, 3]$ y $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, entonces la gráfica de la función racional f puede ser representada por



1.1.4. Función logaritmo. Fución exponencial.

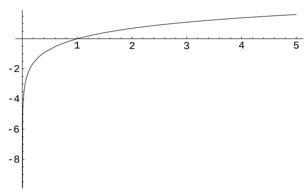
Dado un número real positivo distinto de uno a, se define la función **Logaritmo** de base a, log_a, como la única biyección estrictamente monótona, que existe de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, verificando:
- $log_a(1) = 0$
- $log_a(a) = 1$
- $log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$.

Como consecuencia, se pueden obtener algunas propiedades tales como que:
- $log_a(x^p) = plog_a(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ y para cada $p \in \mathbb{N}$.
- $log_a(x/y) = log_a(x) - log_a(y)$, para cada $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Un caso particular muy importante es cuando a es el número $e \simeq 2,71728$, a tal logaritmo se le denomina **logaritmo neperiano**, y suele representarse en lugar de log_e por ln. Es fácil ver que

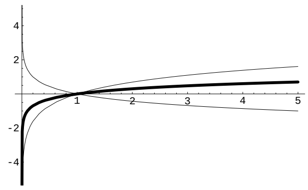
$$log_a(x) = ln(x)/ln(a).$$

Si $A =]0, 5]$ entonces la gráfica de la restricción de la función logaritmo neperiano al conjunto A puede ser representada por



Si $a > 1$, entonces la función logaritmo de base a es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, mientras que si $a < 1$ entonces es una biyección estrictamente decreciente de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$.

Así por ejemplo, para $A =]0, 5]$ y para $a = 10$ y a=0,2 las gráficas de las correspondientes restricciones de la función logaritmo al conjunto A pueden ser comparadas con la anterior



Composición de funciones. Función inversa

Supongamos ahora que existen sendas funciones $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera que el conjunto B contiene al Podemos definir la **función composición** de ambas, $g \circ f$, como la función

$$g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida, para cada $x \in A$, por

$$g \circ f(x) = g[f(x)].$$

Recordemos que asociada a toda función inyectiva $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ podemos considerar la **función inversa**, f^{-1}, definida en $f(A)$, con valores en A y que viene definida mediante la ley :

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in A),$$

esto es,

$$f^{-1} \circ f = I_A.$$

Además es claro que

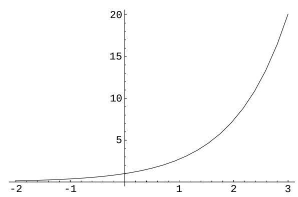
$$f \circ f^{-1} = I_{f(A)}.$$

Es fácil probar, usando estas últimas consideraciones, que toda aplicación estrictamente monótona es inyectiva y que su inversa es igualmente estrictamente monótona y del mismo tipo (creciente ó decreciente).

Función exponencial.

Llamaremos **función exponencial**, e^x, a la función inversa del logaritmo neperiano, será por tanto, una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$ tal que:
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e$
- $e^{x+y} = e^x e^y$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$.
- $e^{lnx} = x$
- $ln(e^x) = x$.
-La función exponencial es continua en su dominio.

Su gráfica se puede representar como sigue:



Dados $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}$, convendremos en notar

$$x^y = e^{ylnx},$$

en particular se obtiene que:

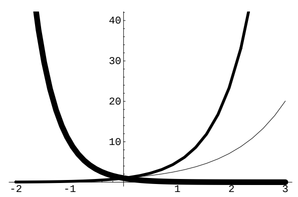
$$ln(x^y) = ylnx,$$

Función exponencial de base a

Dado $a > 0$, $a \neq 1$, la función $h_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $h_a(x) = a^x$, se denomina **función exponencial de base** a, y se notará por a^x.

Dicha función es estrictamente creciente (resp. decreciente) si $a > 1$ (resp. $a < 1$) de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$ y verifica las siguientes propiedades:
- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^{x+y} = a^x a^y$.

Sus gráficas para $a = 0,1$ y $a = 5$ se pueden representar como siguen:

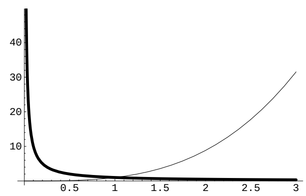


Función potencial

Dado $b \neq 0$, la función $p_b : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $p_b(x) = x^b$, se denomina **función potencial de exponente** b, y se notará por x^b.

Dicha función es estrictamente creciente (resp. decreciente) si $b > 0$ (resp. si $b < 0$) de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ y verifica las siguientes propiedades:
- $1^b = 1$
- $(xy)^b = x^b y^b$.
os.

Sus gráficas (para $b = \pi$ y $b = -1$) se pueden representar como siguen:



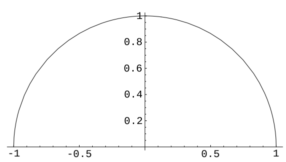
Pasamos ahora a definir las distintas funciones trigonométricas. Adelantaremos que todas las funciones trigonométricas son continuas en su dominio.

1.1.5. Funciones seno, coseno y tangente

Consideremos la función $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

La gráfica de esta función recibe el nombre de **semicircunferencia unidad**.



Pues bien, es sabido que la longitud de dicha gráfica es el $\pi \simeq 3,141592$.

Definimos la función **arcocoseno**, *arc cosx*, como la función biyectiva y estrictamente decreciente del intervalo $[-1, 1]$ en el intervalo $[0, \pi]$ definida por la ley

$arc\,cosx =$ longitud arco semicircunferencia que va desde el punto $(1, 0)$ hasta el punto $(x, f(x))$.

Se puede probar que:

1. $arc\ cosx + arc\ cos(-x) = \pi$.
2. $arc\ cos(0) = \frac{\pi}{2}$.

Función coseno

Se llama **función coseno** y se nota por <u>$cosx$</u> a la única función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ par y periódica con periodo 2π cuya restricción a $[0, \pi]$ es tal que

$$cos(x) = (arc\ cos)^{-1}(x),$$

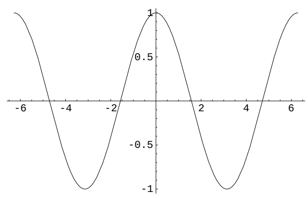
y por tanto, para cada $x \in [0, \pi]$,

$$arccos(cosx) = x,$$

y para cada $y \in [-1, 1]$,

$$cos(arcosy) = y.$$

La gráfica de la función coseno es como sigue

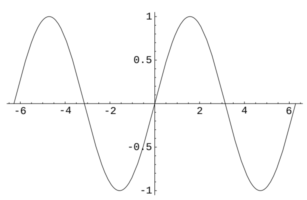


Función seno

Se llama **función seno**, <u>$senx$</u>, a la única función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ impar y periódica con periodo 2π cuya restricción a $[0, \pi]$ es tal que

$$sen(x) = \sqrt{1 - cos^2(x)}.$$

La gráfica de la función seno es como sigue



El siguiente resultado resume algunas propiedades del seno y coseno.

Teorema 1.1.1.

1. *$sen^2x + cos^2x = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.*

2. *La restricción de la función coseno al intervalo $[0, \pi]$ es una biyección estrictamente decreciente de éste en el intervalo $[-1, 1]$, con*

$$cos0 = 1, \quad cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad cos\pi = -1, \quad cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. *La restricción de la función seno al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es una biyección estrictamente creciente de éste en el intervalo $[-1, 1]$, con*

$$sen0 = 0, \quad sen(-\frac{\pi}{2}) = -1, \quad sen\frac{\pi}{2} = 1, \quad sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

4. *Las funciones seno y coseno están acotadas entre -1 y 1.*

5. *La función coseno es una función par y periódica de periodo 2π:*

$$cosx = cos(-x), \quad cos(x + 2\pi) = cosx, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

mientras que la función seno es impar y periódica:

$$sen(-x) = -senx, \quad sen(x + 2\pi) = senx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

6.

$$cos(x + \pi) = -cosx, \quad sen(x + \pi) = -senx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

7. *$cos(x + y) = cosxcosy - senxseny. \qquad sen(x + y) = senxcosy + cosxseny.$*

8. *$\{x \in \mathbb{R};\ cosx = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}. \qquad \{x \in \mathbb{R};\ senx = 0\} = \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$*

Función tangente

Sea $A = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Se llama **función tangente**, $\underline{tgx}$, a la función de A en $\mathbb{R}$ definida por

$$tg(x) = \frac{senx}{cosx}.$$

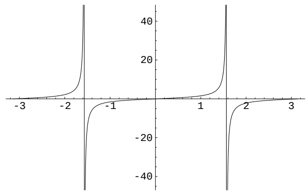
Algunas de sus propiedades pueden verse en el siguiente resultado

Proposición 1.1.2. *1. La función tangente es una función impar y periódica de periodo π, esto es, para cada $x \in A$,*

$$tg(x + \pi) = tg(x).$$

2. *La función tangente restringida al intervalo $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, es una biyección estrictamente creciente de dicho intervalo en $\mathbb{R}$.*

3. *La gráfica de la función tangente restringida al conjunto $A = [-\pi, \pi]\backslash\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ puede representarse de la siguiente forma:*

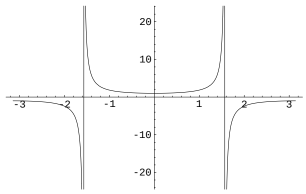


1.1.6. Otras funciones trigonométricas

Sea $A = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Se llama **función secante**, $secx$, a la función de A en $\mathbb{R}$ definida por

$$sec(x) = \frac{1}{cosx}.$$

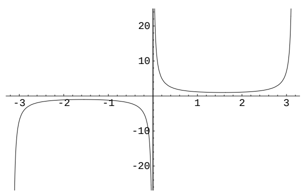
La gráfica de la función secante restringida al conjunto $A = [-\pi, \pi]\backslash\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ puede representarse de la siguiente forma:



Sea $B = \mathbb{R}\backslash\{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Se llama **función cosecante**, $cosecx$, a la función de B en $\mathbb{R}$ definida por

$$cosec(x) = \frac{1}{senx}.$$

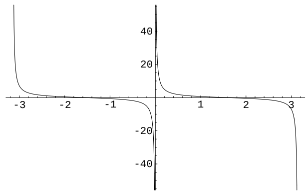
La gráfica de la función cosecante restringida al conjunto $A =]-\pi, \pi[/\{0\}$ puede representarse de la siguiente forma:



Llamaremos **función cotangente**, $cotgx$, a la función de B en $\mathbb{R}$ definida por

$$cotg(x) = \frac{cosx}{senx}.$$

La gráfica de la función cotangente restringida al conjunto $A =]-\pi, \pi[/\{0\}$ puede representarse de la siguiente forma:



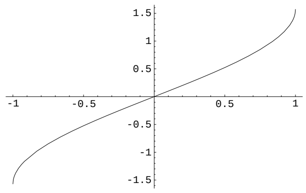
Llamaremos **función arcoseno**, *arc senx*, a la función inversa de la restricción de la función seno al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, esto es,

$$arc\ sen[sen(x)] = x,\ (x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \quad sen[arc\ sen(y)] = y \quad (y \in [-1, 1]).$$

Dicha función es pues una biyección estrictamente creciente de $[-1, 1]$ en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ con

$$arc\ sen(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad arc\ sen(0) = 0, \quad arc\ sen(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Su gráfica es como sigue:



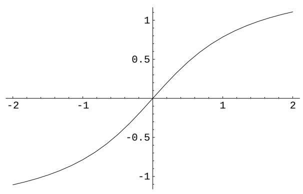
Llamaremos **función arcotangente**, *arc tgx* a la inversa de la res-tricción de la función tangente al intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, esto es,

$$arc\ tg[tg(x)] = x, \quad tg[arc\ tg(y)] = y.$$

Dicha función es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}$ en dicho intervalo con

$$arc\ tg(0) = 0.$$

Su gráfica de es como sigue:



1.1.7. Identidades Trigonométricas.

Usando las propiedades antes descritas de las funciones trigonométricas pueden deducirse otras muchas conocidas como identidades trigonométricas. A continuación damos algunas de ellas. Dados dos números reales x e y en el dominio correspondiente, obtenemos que:

1. Identidades pitagóricas

$$tg^2(x) + 1 = sec^2(x), \quad \text{ó si se quiere} \quad cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2(x)}}.$$

$$cotg^2(x) + 1 = cosec^2(x), \quad \text{ó si se quiere} \quad sen(x) = \frac{tg(x)}{\sqrt{1 + tg^2(x)}}.$$

2.

$$tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgx\ tgy}.$$

3. ángulo doble

$$sen2x = 2senxcosx, \quad cos2x = 2cos^2x - 1 = 1 - 2sen^2x.$$

4. ángulo mitad

$$sen^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x), \quad cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x),$$

$$tg(\frac{x}{2}) = \frac{1 - cosx}{senx} = \frac{senx}{1 + cosx}.$$

5. producto

$$senxseny = \frac{1}{2}[cos(x - y) - cos(x + y)],$$

$$cosxcosy = \frac{1}{2}[cos(x - y) + cos(x + y)],$$

$$senxcosy = \frac{1}{2}[sen(x + y) + sen(x - y)].$$

1.1.8. Funciones definidas a trozos. Función valor absoluto.

Además de sumar, multiplicar y componer, las funciones también se pueden pegar. Supongamos que tenemos un subconjunto A de números reales, un punto $a \in A$ y dos funciones reales de variable real g y h definidas respectivamente en $B = \{x \in A;\ x < a\}$ y $C = \{x \in A;\ x \geq a\}$. A partir de aquí podemos definir una nueva función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < a \\ h(x) & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

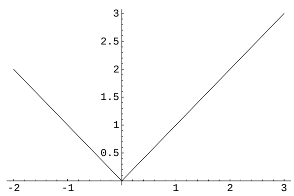
Decimos que una tal función es una **función definida a trozos**. Es evidente que las propiedades de la nueva función dependerán de las propiedades de las funciones que la definen y de la forma en que se sueldan las funciones g y h en el punto a.

Como ejemplo consideremos la función **valor absoluto.**

Se define la función **valor absoluto** como la función $|.| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida para cada $x \in \mathbb{R}$ por

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

La gráfica puede representarse como la unión de las bisectrices del primer y segundo cuadrante.



1.1.9. Relación de ejercicios

1. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi, \pi[$ la función definida por $g(y) = 2arctgy$. Hállese en función de y, $seng(y)$ y $cosg(y)$.

2. Sea A un subconjunto de números reales y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. ¿Qué se puede decir acerca de la gráfica de una función par?,¿ y de una función impar? Dense ejemplos de funciones par, impar y no par ni impar.

3. ¿Qué funciones componen la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos?

$$1)\ f(x) = (ln^2 x)e^{x^2}, \qquad 2)\ f(x) = (\sqrt{x+1})^{ln(x^3)}.$$

Dense otros ejemplos de composición de funciones.

1.2. Modulo: Continuidad, Límites y Derivación

Sumario

Este módulo trata del concepto de límite funcional, el cual está muy relacionado con los conceptos de continuidad y de derivación de una función real de variable real, que también introducimos en este módulo. Prestaremos atención al problema original de determinar la tangente a una curva dada y estudiaremos algunas de sus propiedades: La relación entre monotonía y derivabilidad y las reglas de LijHôpital. Finalmente recordamos cómo calcular los extremos de una función. El contenido completo de este módulo se articula de la siguiente manera:

1.2.1. Continuidad

Sea A un subconjunto no vacío de números reales y sea $a \in A$. De forma intuitiva, una función se dice continua en un punto a si a pequeñas variaciones del valor a le corresponden pequeñas variaciones de la función f. Más concretamente

Se dice que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función continua en** $a \in A$ si:

" *para cada intervalo J que contenga a $f(a)$, existe un intervalo que contiene al punto a tal que la imagen, de cada punto de dicho intervalo que está en A, pertenece al intervalo J,* " Se dice que f es **continua en B** si lo es en todos los puntos de B.

Se puede probar que **todas las funciones elementales** son **continuas** en sus correspondientes dominios.

Destacamos ahora algunas propiedades de las funciones continuas.

1. La suma de funciones continuas es también una función continua.
2. La composición de funciones continuas resulta ser una nueva función continua.
3. (propiedad de conservación del signo)

   Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en un punto a y $f(a) \neq 0$. Entonces existe un intervalo centrado en a, tal que la imagen de los puntos de ese intervalo que están en A conserva el signo de $f(a)$.
4. (teorema de los ceros de Bolzano)

   Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y si $f(a).f(b) < 0$, entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

1.2.2. Límite funcional

De forma intuitiva, una función tiene límite L en un punto x_0 si en todo punto próximo a x_0 la función toma un valor próximo a L.

Para una formulación más rigurosa necesitamos del concepto de punto de acumulación de un conjunto.

Sea A un subconjunto no vacío de números reales. Se dice que x_0 es un **punto de acumulación** de A,

"si todo intervalo centrado en x_0 tiene puntos, distintos del propio x_0, que pertenecen al propio A,

Denominaremos por A' al conjunto de todos los puntos de acumulación de A

Diremos que x_0 es un **punto de acumulación de A por la derecha** (respectivamente por la izquierda) si

" *si todo intervalo de extremo inferior (resp. superior) x_0 tiene puntos, distinto del propio x_0, que pertenecen al propio A.* "

Límite funcional:

Sean A un subconjunto no vacío de números reales, $x_0 \in A'$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f **tiene límite en el punto** x_0 si existe un número real L con la siguiente propiedad:

"para cada intervalo que contiene a L, existe un intervalo I centrado en x_0 tal que la imagen de cada punto de dicho intervalo, que está en A, salvo quizás el propio x_0, pertenece al intervalo J,

El tal valor L, si existe es único y recibe el nombre de **límite** de f en el punto x_0 y escribiremos:

$$L = lim_{x \to x_0} f(x).$$

Observación 1.2.1. Es importante hacer notar que la igualdad anterior encierra dos afirmaciones: que f tiene límite en el punto x_0 y que dicho límite vale L.

Límites laterales:

Supongamos que x_0 un punto de acumulación por la derecha. Se dice que f tiene **límite por la derecha** en el punto x_0 si existe un número real L con la siguiente propiedad:

"para cada intervalo que contiene a L, existe un intervalo cuyo extremo izquierdo es x_0, tal que la imagen, de cada punto de dicho intervalo que está en A, salvo quizás el propio x_0, pertenece al intervalo J.

Si tal L existe, entoces es único y diremos que L es el **límite por la derecha** de f en el punto x_0 y escribiremos:

$$L = lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Supongamos que x_0 es un punto de acumlación por la izquierda. Se dice que f tiene **límite por la izquierda** en el punto x_0 si existe un número real L con la siguiente propiedad:

"para cada intervalo que contiene a L, existe un intervalo cuyo extremo derecho es x_0, tal que la imagen, de cada punto de dicho intervalo que está en A, salvo quizás el propio x_0, pertenece al intervalo J.

Si tal L existe, entoces es único y diremos que L es el **límite por la izquierda** de f en el punto x_0 y escribiremos:

$$L = lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Relación entre el límite ordinario y los límites laterales

Proposición 1.2.2. *Sean A un subconjunto no vacío de números reales, $x_0 \in A'$, $L \in \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.*

1. *Si x_0 es de acumulación sólo por la derecha, entonces*

$$L = lim_{x \to x_0} f(x) \text{ si, y sólo si, } L = lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

2. *Si x_0 es de acumulación sólo por la izquierda, entonces*

$$L = lim_{x\to x_0} f(x) \text{ si, y sólo si, } L = lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

3. *Si x_0 es de acumulación por ambos lados, entonces*

$$lim_{x\to x_0} f(x) = L \text{ si, y sólo si, } lim_{x\to x_0^+} f(x) = lim_{x\to x_0^-} f(x) = L,$$

esto es, si existen los límites laterales y coinciden.

1.2.3. Límites en el infinito.

Sea A un subconjunto no vacío de números reales no mayorado y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f **tiene límite en** $+\infty$ si existe un número real L con la siguiente propiedad:

" *Para cada intervalo J que contenga a L, existe una semirrecta de origen $M \in \mathbb{R}$ tal que la imagen, de cada punto de la semirrecta que está en A, pertence al intervalo J.* "

El tal límite L, caso de existir, es único. Diremos que L es el **límite en** $+\infty$ de f y escribiremos:

$$L = lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Si A es un subconjunto no vacío de números reales no minorado, se dice que f **tiene límite en** $-\infty$ si existe un número real L con la siguiente propiedad:

" *Para cada intervalo J que contenga a L, existe una semirrecta de extremo $M \in \mathbb{R}$ tal que la imagen de cada punto de la semirrecta que está en A, pertenece al intervalo J.* "

En todo caso diremos que L es el **límite en** $-\infty$ de f y escribiremos:

$$L = lim_{x\to-\infty} f(x).$$

1.2.4. Funciones divergentes

Sea A un subconjunto no vacío de números reales y sea x_0 un punto de acumulación. Se dice que la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ **diverge positivamente en el punto** x_0 si verifica la siguiente propiedad:

"*Para cada semirrecta de origen M, existe un intervalo I centrado en x_0 tal que la imagen, de cada punto de dicho intervalo que está en A, pertence a la semirrecta de origen M.* "

Y escribiremos:

$$lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

Sea A un subconjunto no vacío de números reales y sea x_0 un punto de acumulación. Se dice que la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ **diverge negativamente en el punto** x_0 si verifica la siguiente propiedad:

"*Para cada semirrecta de extremo M, existe un intervalo I centrado en x_0 tal que la imagen, de cada punto de dicho intervalo que está en A, pertence a la semirrecta de extremo M.*"

Y escribiremos:

$$lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Si A es un subconjunto no vacío de números reales no mayorado. Diremos que la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ **diverge positivamente en** $+\infty$ si verifica la siguiente propiedad:

"*Para cada semirrecta de origen M, existe una semirrecta de origen N tal que la imagen, de cada punto de dicha semirrecta que está en A, pertence a la semirrecta de origen M.*"

Y escribiremos:

$$lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Análogamente se pueden definir las funciones divergentes negativamente en $+\infty$ y las funciones divergentes negativa y positivamente en $-\infty$.

Antes de finalizar esta sección queremos recordar el comportamiento de algunas funciones elementales en infinito o en los puntos extremos del dominio.

1.- $lim_{x \to +\infty}\ e^x = +\infty$,

2.- $lim_{x \to -\infty}\ e^x = 0$

3.- $lim_{x \to +\infty}\ ln(x) = +\infty$,

4.- $lim_{x \to 0^+}\ ln(x) = -\infty$,

5.- $lim_{x \to \pm\pi/2}\ tg(x) = \pm\infty$,

6.- $lim_{x \to \pm\infty}\ arctg(x) = \pm\pi/2$.

1.2.5. Algebra de límites.

Necesitamos ahora expresar qué ocurre con los límites de funciones cuando sumo, multiplico o divido funciones que tienen límite o son divergentes.

Teorema 1.2.3. *(de la suma de funciones)*
Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in A'$. Supongamos que $lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$ y que $lim_{x\to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$. Entonces la función suma $f + g$ converge o diverge en x_0 según lo expresado en la siguiente tabla:

$lim(f+g)$	$L \in \mathbb{R}$	$L = +\infty$	$L = -\infty$
$M \in \mathbb{R}$	$L + M$	$+\infty$	$-\infty$
$M = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$M = -\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Teorema 1.2.4. *(del producto de funciones)*
Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in A'$. Supongamos que $lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$ y que $lim_{x\to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$. Entonces la función producto $f.g$ converge o diverge en x_0 según lo expresado en la siguiente tabla:

$lim(f.g)$	$L \in \mathbb{R}^+$	$L = 0$	$L \in \mathbb{R}^-$	$L = +\infty$	$L = -\infty$
$M \in \mathbb{R}^+$	LM	0	LM	$+\infty$	$-\infty$
$M = 0$	0	0	0	?	?
$M \in \mathbb{R}^-$	LM	0	LM	$-\infty$	$+\infty$
$M = +\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$M = -\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Además si $L = 0$ y g es una función acotada, entonces

$$lim_{x\to x_0} f(x).g(x) = 0.$$

Teorema 1.2.5. *(del cociente de funciones)*
Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) \neq 0$ y sea $x_0 \in A'$. Supongamos que $lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$ y que $lim_{x\to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$. Entonces la función cociente f/g converge o diverge en x_0 según lo expresado en la siguiente tabla:

$lim(f/g)$	$L \in \mathbb{R}^+$	$L = 0$	$L \in \mathbb{R}^-$	$L = +\infty$	$L = -\infty$
$M \in \mathbb{R}^+$	L/M	0	L/M	$+\infty$	$-\infty$
$M = 0,\ g(x) > 0$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$M = 0,\ g(x) < 0$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$M \in \mathbb{R}^-$	L/M	0	L/M	$-\infty$	$+\infty$
$M = +\infty$	0	0	0	?	?
$M = -\infty$	0	0	0	?	?

Observación 1.2.6. El símbolo ? que aparece en las tablas indica que el resultado depende de las funciones f y g concretas.

Sigamos ahora con los límites de funciones de tipo exponencial. La idea que subyace en todo lo que sigue es la continuidad de la funciones logaritmo y exponencial.

Teorema 1.2.7. *(f^g)*
Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que, para cada $x \in A$, $f(x) > 0$, y sea $x_0 \in A'$. Supongamos que $lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}_0^+ \bigcup \{+\infty\}$ y que $lim_{x \to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$. Entonces la función f^g converge o diverge en x_0 según lo expresado en la siguiente tabla:

$lim f^g$	$L = 0$	$0 < L < 1$	$L = 1$	$L > 1$	$L = +\infty$
$M \in \mathbb{R}^+$	0	L^M	1	L^M	$+\infty$
$M = 0$	?	1	1	1	?
$M \in \mathbb{R}^-$	$+\infty$	L^M	1	L^M	0
$M = +\infty$	0	0	?	$+\infty$	$+\infty$
$M = -\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	0	0

1.2.6. Indeterminaciones

Estos resultados inciertos reciben el nombre de **indeterminaciones**. Así pues, vistos los teoremas anteriores, las posibles indeterminaciones de la forma: $\infty - \infty$, $0.\infty$, $0/0$ e ∞/∞, 0^0, 1^∞ e ∞^0

Enseguida veremos cómo resolver algunas de estas indeterminaciones. Basten ahora algunos ejemplos y comentarios.

1.) <u>Límite en el infinito de un polinomio</u>

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 + a_0$, entonces
$lim_{x \to +\infty} p(x) =$signo$(a_n)\infty$.
$lim_{x \to -\infty} p(x) = (-1)^n$signo$(a_n)\ \infty$.

2.) <u>Límite en el infinito de un cociente de polinomios.</u>

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 + a_0$, y $q(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + ... + b_1 + b_0$, entonces

$$lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \left\{ \begin{array}{cl} signo(a_n/b_p)\infty & si\ n > p \\ a_n/b_p & si\ n = p \\ 0 & si\ n < p \end{array} \right.$$

$$lim_{x\to -\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} signo(a_n/b_p)(-1)^{n-p}\infty & si\ n > p \\ a_n/b_p & si\ n = p \\ 0 & si\ n < p \end{cases}$$

3.) En general, las indeterminaciones ∞/∞, $0.\infty$ y $0/0$ se resolverán con las reglas de LňHôpital que veremos más adelante.

4.) En general, las indeterminaciones de la forma: 0^0, 1^∞ e ∞^0 se resolverán intentando traducirlas en términos de cocientes, para luego aplicar las prometidas reglas de LňHopital, de la siguiente forma:

Proposición 1.2.8. *Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que, para cada $x \in A$, $f(x) > 0$. Sean $x_0 \in A'$ y $L \in \mathbb{R}\bigcup\{+\infty, -\infty\}$. Supongamos que $lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$,0 (resp. 1) y que $lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ (resp. $\pm\infty$). Entonces*

$$lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^L \Longleftrightarrow L = lim_{x\to x_0} g(x) ln(f(x)).$$

Como ejemplo podemos calcular $lim_{x\to +\infty} x^{1/x}$.

Además, para la indeterminación del tipo 1^∞, se tiene la siguiente técnica propia:

Proposición 1.2.9. *(1^∞)*
Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que, para cada $x \in A$, $f(x) > 0$. Sean $x_0 \in A'$ y $L \in \mathbb{R}\bigcup\{+\infty, -\infty\}$. Supongamos que $lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ y que $lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$. Entonces

$$lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^L \Longleftrightarrow L = lim_{x\to x_0} g(x)(f(x) - 1).$$

Como ejemplo podemos calcular $lim_{x\to +\infty}(1 + 1/x)^x$.

1.2.7. Relación entre límite y continuidad.

Veamos que la continuidad está estrechamente relacionada con el límite funcional.

Proposición 1.2.10. *Sean A un subconjunto no vacío de números reales, $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si a es un punto de acumulación de A, entonces f es continua en a si, y sólo si, $lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Observación 1.2.11. Obsérvese que si $a \notin A$ no tiene sentido hablar de continuidad, Así pues, puede ocurrir que una función tenga límite en un punto $a \in A'$ y que no tenga sentido hablar de continuidad en a ($a \notin A$). Por otra parte, obsérvese que si una función es continua en un punto de acumulación, la función y el límite "conmutan" de lugar, esto es, $f(lim...) = limf(...)$

Tipos de discontinuidad

Cuando una función no sea continua en un punto del conjunto en el que está definida, se dirá que tiene una **discontinuidad** en dicho punto.

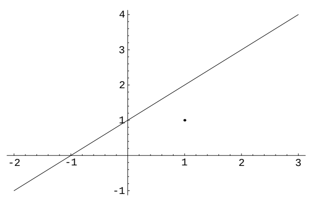
Sea A un subconjunto no vacío de números reales, $a \in A \bigcap A'$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces:

1. Si existe el límite de f en a y no coincide con $f(a)$, se dice que f tiene una discontinuidad **evitable** en a.

   La función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente expresión:

   $$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

   presenta una discontinuidad evitable en 1, lo cual podía haberse adivinado si hubiésemos pintado previamente su gráfica

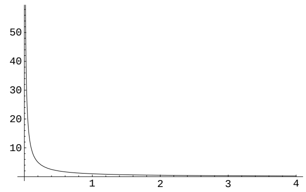
2. Si no existe alguno de los límites laterales de f en a se dice que f tiene una discontinuidad **esencial** en a.

   La función $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante la expresión:

   $$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   presenta una discontinuidad esencial en 0.

   Este hecho puede adivinarse cuando observamos su gráfica:



3. Si existen los dos límites laterales de f en a y son distintos, se dice que f tiene una discontinuidad **de salto** en a. Enseguida veremos un ejemplo.

Observación 1.2.12. La continuidad de una función definida a trozos también está determinada por el valor del límite en el punto de soldadura.

Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

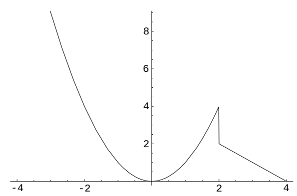
$$f(x) = \begin{cases} g(x) & si\ x \leq a \\ h(x) & si\ x > a \end{cases}$$

Si g y h son continuas en sus dominios la continuidad de la función f sólo está en entredicho en el punto a. Habrá que estudiar qué ocurre con el límite de f en a. Como

ejemplo estudiemos la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 2 \\ -x+4 & si\ x > 2 \end{cases}$$

cuya gráfica es como sigue:



Dado que la función x^2 es continua en $]-\infty, 2]$ y la función $x + 4$ es continua en $]2, +\infty[$, sabemos que f es continua en $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

¿Qué ocurre en el punto 2? Como se desprende de la observación de su gráfica, la función presenta una discontinuidad de salto.

1.2.8. Derivada. Funciones derivables.

La idea de derivada fue originada por el problema de dibujar una tangente a una curva. Fermat, en el siglo XVII, tratando de determinar los máximos y mínimos de ciertas funciones, observó que si la gráfica de dichas funciones, en un determinado punto, tiene asociada una recta tangente horizontal, dicho punto es un candidato a máximo o mínimo. Estas ideas desembocaron en el concepto de derivada e inmediatamente se observó que era un instrumento válido también para el cálculo de velocidades, y en general, para el estudio de la variación de una función.

Sea A un subconjunto no vacío de números reales y sea $a \in A \cap A'$. Se dice que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función derivable en** a si existe el siguiente límite:

$$lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

límite, que si existe, coincide con

$$lim_{x \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Caso de existir, el límite recibe el nombre de **derivada de** f **en el punto** a y se representa por $f'(a)$.

Dado un subconjunto B de $A \cap A'$, se dice que f **es derivable en** B si es derivable en todos los puntos de B.

Es claro que la función identidad I y toda función constante,C, son funciones derivables en todo $\mathbb{R}$, con $I' = 1$ y $C' = 0$.

Relación entre continuidad y derivación. Interpretación geométrica.

1. Si una función es derivable en un punto, entonces también dicha función es continua en el mismo punto.

2. No toda función continua es derivable: la función valor absoluto es derivable en todos los puntos de $\mathbb{R}$, salvo en cero (no coinciden los límites laterales del cociente $\frac{|x|}{x}$ en cero) y sin embargo sabemos que sí es continua cero.

3. Si f es continua en a y además existe una función afín g tal que

   $$lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0,$$

   entonces f es derivable en a.

Vamos ahora a interpretar **geométricamente** la existencia de esta función afín.

Obsérvese que cualquier recta que pase por el punto $(a, f(a))$ tiene la forma

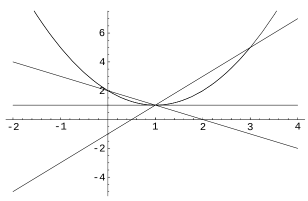
$$y = m(x - a) + f(a).$$

Es claro que manipulando la igualdad del apartado b) obtenemos que

$$g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$$

y por tanto su gráfica es una recta del tipo anterior con $m = f'(a)$; la condición sobre el límite del cociente del apartado 2) nos asegura que la gráfica de la función afín g es la que mejor se aproxima a la gráfica de la función f en las proximidades del punto a.

Así por ejemplo si consideramos la función $f(x) = (x - 1)^2 + 1$ y el punto $(1, 1)$, se tiene que



y por tanto es visible que la recta horizontal es la que mayor "parecido"tiene con la parábola en las ”proximidades” del punto $(1, 1)$.

La recta $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ recibe el nombre de **recta tangente a la gráfica de f en el punto** $(a, f(a))$

Derivadas laterales

Sean A un subconjunto no vacío de números reales, a un punto del conjunto que es de acumulación por la derecha y una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es **derivable por la derecha** en el punto a si existe existe el siguiente límite:

$$lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

El límite recibe el nombre de **derivada de f por la derecha en el punto** a y se nota por $f'_+(a)$.

Análogamente podemos definir el concepto de derivada por la izquierda.

Veamos la relación entre la derivada ordinaria y las derivadas laterales.

Proposición 1.2.13. *Sean A un subconjunto no vacío de números reales, $a \in A$, y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.*

1. *Si a es de acumulación sólo por la derecha, entonces f es derivable en a si, y sólo si f es derivable por la derecha en a. En caso afirmativo* $f'(a) = f'_+(a)$

2. *Si a es de acumulación sólo por la izquierda, entonces f es derivable en a si, y sólo si f es derivable por la izquierda en a. En caso afirmativo* $f'(a) = f'_-(a)$.

3. *Si a es de acumulación por la derecha y por la izquierda, entonces f es derivable en a si, y sólo si f es derivable por la derecha y por la izquierda en a y ambas coinciden. En caso afirmativo* $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$

Algebra de derivadas. Derivadas de las funciones elementales.

También la suma, el producto, el cociente y la composición de funciones derivables es una nueva función derivable.

Proposición 1.2.14. *Sean A un subconjunto de números reales, $a \in A$ y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables en a. Entonces $f + g$ y $f.g$ son dos funciones derivables en a, y se tiene que*

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (f.g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Si además, para cada $x \in A$, $g(x) \neq 0$, entonces f/g es también derivable en a y se tiene que

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Como consecuencia obtenemos que, **todas las funciones racionales son funciones derivables en su dominio**.

Por otra parte, dado que también las funciones **logaritmo neperiano, seno y coseno son derivables** en sus respectivos dominios. De hecho, para cada x del dominio correspondiente,

$$ln'(x) = 1/x, \quad sen'(x) = cos(x), \quad cos'(x) = -sen(x),$$

se tiene que también la función **tangente es derivable** en su dominio. De hecho, para cada $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$$tg'(x) = 1 + tg^2(x).$$

Teorema 1.2.15. *(regla de la cadena)*

Sean A un subconjunto de números reales, $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en a. Sean ahora $B \supseteq f(A)$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $f(a)$. Entonces $g \circ f$, es una función derivable en a y se tiene que

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a).$$

Como consecuencia obtenemos que

Corolario 1.2.16. *Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una función derivable en a, entonces*

$$(lnf(a))' = \frac{f'(a)}{f(a)}.$$

A partir de aquí, obtenemos que también las funciones **exponencial y arcotangente son derivables** en su dominio, mientras que las funciones **arcocoseno y arcoseno <u>sólo</u> son derivables en el intervalo <u>abierto</u>** $]-1,1[$. De hecho, para cada $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$(e^x)' = e^x, \qquad (arctg)'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

mientras que, para cada $x \in]-1,1[$,

$$(arc\ cos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (arc\ sen)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Y si se quiere, usando la regla de la cadena, si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en a y tal que $f(A)$ está contenido en el correspondiente dominio, entonces

$$(e^{f(a)})' = f'(a)e^{f(a)}, \qquad (arctg)'(f(a)) = \frac{f'(a)}{1+f^2(a)},$$

$$(arc\ cos)'(f(a)) = \frac{-f'(a)}{\sqrt{1-f^2(a)}}, \qquad (arc\ sen)'(f(a)) = \frac{f'(a))}{\sqrt{1-f^2(a)}}.$$

Además si $f(A)$ está contenido en $\mathbb{R}^+$ y $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es otra función derivable también en a, entonces la función $h = f^g$ es derivable en a y

$$h'(a) = f(a)^{g(a)}[g'(a)ln(f(a)) + g(a)\frac{f'(a)}{f(a)}].$$

Para calcular derivadas tan complicadas como la anterior podemos usar la técnica logarítmica. El procedimiento es como sigue.

Técnica logarítmica

1. Tomamos logaritmos en la igualdad que define a h.

$$ln(h(x)) = g(x)ln(f(x)).$$

2. Derivamos ambas igualdades en el punto a

$$\frac{h'(a)}{h(a)} = g'(a)ln(f(a)) + g(a)\frac{f'(a)}{f(a)}.$$

3. Finalmente despejamos y obtenemos que

$$h'(a) = f(a)^{g(a)}[g'(a)ln(f(a)) + g(a)\frac{f'(a)}{f(a)}].$$

Como ejercicio calcúlese la función derivada de $f(x) = x^{x^x}$ en $\mathbb{R}^+$.

Derivada de una función definida a trozos

La derivabilidad de una función definida a trozos también está determinada por el valor del límite en el punto de soldadura.

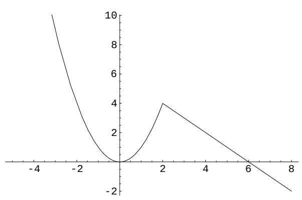
Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & si\ x \leq a \\ h(x) & si\ x > a \end{cases}$$

Si g y h son derivables en sus dominios la derivabilidad de la función f sólo está en entredicho en el punto a. Habrá que estudiar qué ocurre con el límite de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ en a. Como ejemplo estudiemos la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 2 \\ -x+6 & si\ x > 2 \end{cases}$$

cuya gráfica es como sigue



Dado que la función x^2 es derivable en $\mathbb{R}$, entonces $f/_{]-\infty,2]} = x^2/_{]-\infty,2]}$ es derivable en todos los puntos del intervalo $]-\infty, 2]$, luego por el apartado (2), f es derivable en $]\infty, 2[$. Idéntico razonamiento puede seguirse para el intervalo $]2, +\infty[$.

¿Qué ocurre en el punto 2? Como se desprende de la observación de su gráfica, la función presenta un "pico", luego pensamos que no es derivable en 2. Compruébese. Obsérvese además que en cambio la función $f/]-\infty, 2]$ es derivable en 2.

1.2.9. Teoremas de Rolle y del valor medio, y reglas de LęHôpital.

Recordemos ahora algunas propiedades y características de las funciones derivables. Usaremos funciones cuyos dominios son intervalos en la que todos sus puntos son de acumulación).

Teorema 1.2.17. *(de Rolle)*
Sean $[a,b]$ un intervalo de numeros reales, y $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua y derivable en $]a,b[$ verificando que $f(a)=f(b)$. Entonces existe $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=0$.

resultado que puede formularse de forma equivalente,

Teorema 1.2.18. *(del valor medio)*
Sean $[a,b]$ un intervalo de numeros reales, y $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua y derivable en $]a,b[$. Entonces existe $c\in]a,b[$ tal que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Como primera consecuencia obtenemos la siguiente relación entre el signo de la derivada y la monotonía de la función:

Corolario 1.2.19. *(monotonía de una función derivable)*
Sea I un intervalo de numeros reales, y $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ una función derivable. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:

1. *f es creciente si, y sólo si $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in I$.*
2. *f es decreciente si, y sólo si $f'(x)\leq 0,\ \forall x\in I$.*
3. *Si $f'(x)=0,\forall x\in I$, si, y sólo f es constante.*
4. *Si $f'(x)>0\ \forall x\in I$, entonces f es estrictamente creciente.*
5. *Si $f'(x)<0\ \forall x\in I$, entonces f es estrictamente decreciente.*
6. *Si $f'(x)\neq 0\ \forall x\in I$, entonces f es estrictamente monótona.*

La segunda consecuencia a señalar es una potente herramienta que nos va a permitir resolver muchas de las indeterminaciones ya presentadas, relativas a la convergencia de las funciones.

Corolario 1.2.20. *(Reglas de L+Hôpital)*
Sea I un intervalo de números reales, $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ y $a \in I$ y supongamos que $f, g : I \backslash \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones tales que

1. *f y g son derivables,*
2. *$g'(x) \neq 0$,*

   a) **Primera Regla de L+Hôpital**

$$lim_{x \to a} f(x) = lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

   ó

   b) **Segunda Regla de L+Hôpital***:*
   la función $|g|$ diverge positivamente en a,

Si $lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces $lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Observación 1.2.21. Las Reglas de L'Hôpital siguen permaneciendo válidas para límites laterales, límites en en $+\infty$ y en $-\infty$.

Finalmente damos una consecuencia práctica para calcular la derivada de algunas funciones definidas a trozos.

Corolario 1.2.22. *Sea I un intervalo, $a \in I$ y $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en a y derivable al menos en $I \backslash \{a\}$. Si h' tiene límite en el punto a entonces h es derivable en a y*

$$h'(a) = lim_{x \to a} h'(x).$$

1.2.10. Extremos de una función

Sea A un subconjunto no vacío de números reales y $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que

a es un **máximo absoluto**, ó simplemente que es un máximo, de f, ó que f **alcanza su máximo en** a si se verifica que

$$f(a) \geq f(x), \ \forall x \in A.$$

a es un **mínimo absoluto** ó simplemente que es un mínimo, de f ó que f **alcanza su mínimo en** a si se verifica que

$$f(a) \leq f(x), \ \forall x \in A.$$

a es un **punto extremo** de f si ó bien es un máximo ó bien es un mínimo.

Extremos relativos

Siendo A,f y a como antes, se dice que:

- a es un **máximo relativo** o que f **tiene un máximo relativo en** a si se verifican las siguientes condiciones:

  a) Existe $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subseteq A$.

  b) $f(a) \geq f(x), \ \forall x \in]a-r, a+r[$,

  esto es, la función tiene un máximo absoluto en un entorno del punto a.

- a es un **mínimo relativo** o que f **tiene un mínimo relativo en** a si se verifican las siguientes condiciones:

  a) Existe $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subseteq A$.

  b) $f(a) \leq f(x), \ \forall x \in]a-r, a+r[$,

  esto es, la función tiene un mínimo absoluto en un entorno del punto a

- a es un **extremo relativo** si ó bien es un máximo relativo ó bien es un mínimo relativo.

Con el siguiente ejemplo vemos qué no existe en general una relación entre extremo relativo y extremo absoluto.

Ejemplo:

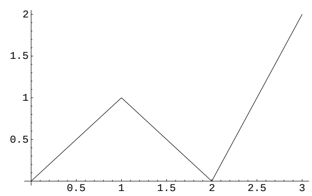
Estúdiense los extremos relativos y absolutos de la función

$$f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2x-4 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Observemos primero su gráfica:



y comprobemos que

1. 0 es un mínimo absoluto pero no relativo.
2. 1 es un máximo relativo pero no absoluto.
3. 2 es un mínimo relativo y absoluto
4. 3 es un máximo absoluto pero no relativo.

Nota Si a es un punto interior y f alcanza su máximo (resp. mínimo) absoluto en a, entonces f tiene un máximo (resp. mínimo) relativo en a.

Regla práctica para el cálculo de extremos

Comenzamos afirmando que en todo extremo relativo la derivada se anula.

Proposición 1.2.23. *(Lema I.7.9)(condición necesaria)*
Sea I un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es derivable en a y tiene un extremo relativo en $a \in I$, entonces $f'(a) = 0$.

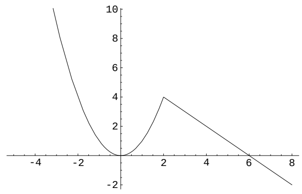
Este sencillo resultado nos permite elaborar la siguiente regla práctica para el cálculo de extremos.
Sean A un subconjunto no vacío de números reales y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Supongamos que f **alcanza su máximo o su mínimo absoluto (resp. relativo) en** a, entonces a está **en una de las tres (resp. dos últimas) situaciones siguientes**:

1) No existe ningún intervalo centrado en a contenido en A.
2) Existe un intervalo centrado en a contenido en A y f no es derivable en a.
3) Existe un intervalo centrado en a contenido en A, f es derivable en a y $f'(a) = 0$.

El siguiente resultado nos permite ver si los puntos del segundo y tercer tipo son, al menos, extremos relativos y de qué naturaleza son.

Proposición 1.2.24. *(condición suficiente)*
Sean $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ y notemos por $I =]a - r, a + r[$. Sea A un conjunto que contiene a I y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y derivable en $I \backslash \{a\}$.

1. *Si para cada $x \in I$ con $x < a$ se tiene que $f'(x) \geq 0$ y para cada $x \in I$ con $x > a$ se tiene que $f'(x) \leq 0$, entonces f alcanza un máximo relativo en a.*
2. *Si para cada $x \in I$, con $x < a$, se tiene que $f'(x) \leq 0$ y para cada $x \in I$, con $x > a$, se tiene que $f'(x) \geq 0$, entonces f alcanza un mínimo relativo en a.*



Ejemplo: Calcúlense los extremos de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 2 \\ -x+6 & si\ x > 2 \end{cases}$$

Considérese previamente su gráfica

Confírmese que f tiene en 0 un mínimo relativo (no absoluto) y en 2 un máximo relativo (no absoluto) y que f no tiene extremos absolutos.

Ejercicio: Calcúlense los extremos de la función anterior restringida al intervalo $[0, 4]$.

Derivadas segundas

Sea A un subconjunto no vacío de números reales y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Considérese el conjunto

$$A_1 = \{a \in A \cap A' : \ f \text{ es derivable en } a\}.$$

Si A_1 es un conjunto no vacío podemos construir la función que a cada punto de A_1 le hace corresponder la derivada de f en dicho punto. Dicha función, que notaremos por f', recibe el nombre de **función derivada** de f. Si $a \in A_1 \bigcap (A_1)'$ y f' es derivable en a, diremos que f es **dos veces derivable en** a y llamaremos **derivada segunda** de f en a a la derivada de f' en a, y la notaremos por $f''(a)$.

Podemos ahora obtener una nueva regla práctica para el cálculo de extremos relativos.

Proposición 1.2.25. *Sea I un intervalo, $a \in I$, y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con*

$$f'(a) = 0 \ y \ f''(a) \neq 0.$$

Entonces si

a) $f''(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en a.

b) $f''(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a.

Como ejercicio calcúlese el vértice de la parábola $y = x^2 + 3x - 2$.

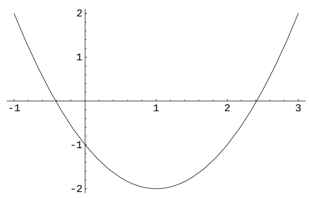
1.2.11. Funciones convexas

Veamos ahora cómo se interpreta geométricamente el hecho de que la derivada segunda sea no negativa.

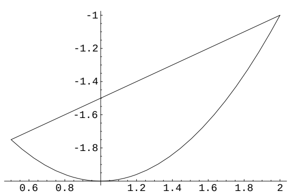
Sea I un intervalo. Se dice $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función convexa** cuando para cualesquiera dos puntos $a, b \in I$ con $a < b$ y para todo número real $t \in]0,1[$ se verifica que

$$f((1-t)a + tb)) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Obsérvese que la función $f(x) = (x-1)^2 - 2$ es convexa ya que su gráfica,



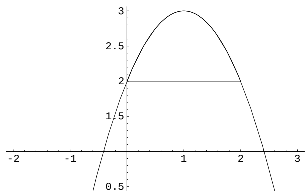
verifica que la imagen de cualquier intervalo contenido en $\mathbb{R}$ está por "debajo"del segmento que une las imágenes de los extremos. Considérese por ejemplo el intervalo $[1/2, 2])$ y el segmento $[(1/2, -3/4), (2, -1)]$ que une las imágenes de sus extremos, tal como vemos en la figura siguiente



Se dice $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función cóncava** cuando para cualesquiera dos puntos $a, b \in I$ con $a < b$ y para todo número real $t \in]0,1[$ se verifica que

$$f((1-t)a + tb)) \geq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Obsérvese que la función $f(x) = -(x-1)^2 + 3$ es cóncava ya que por ejemplo, la imagen del intervalo $[0, 2]$ está por encima del segmento $[(0, 2), (2, 2)]$ tal como se aprecia en la siguiente figura



Es claro que toda función afín es simultáneamente convexa y cóncava.

Finalmente veamos que existe una estrecha relación entre la convexidad y el signo de la segunda derivada.

Proposición 1.2.26. *Sea I un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en I. Entonces equivalen:*

1. *f es convexa.*
2. *$f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.*

Es fácil ver ahora que la función exponencial es una función convexa y la función logaritmo neperiano es una función cóncava.

1.2.12. Relación de ejercicios

1. Para cada una de las siguientes funciones polinómicas f, hállese un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún x entre n y $n+1$.

   i) $f(x) = x^3 + x + 3$

   ii) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$

   iii) $f(x) = x^5 + x + 1$

   iv) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

2. Pruébese que todo polinomio de grado impar admite al menos una raíz real.

3. Sea P un polinomio de grado n tal que el término independiente y el coeficiente líder tienen signo opuesto. Pruébese que P tiene al menos una raíz positiva.

4. Un escalador comienza, desde su campamento base, a subir a una montaña el Sábado a las 7 horas, alcanzando la cima a las 8 de la tarde. A las 7 horas del Domingo inicia el descenso hacia el campamento base tardando el mismo tiempo que le costó la subida. Demostrar que existe una determinada hora, a lo largo del Domingo, en la que el escalador se encuentra exactamente a la misma altura que a esa misma hora del Sábado.

5. Calcúlese la derivada de las siguientes funciones cuya ley viene dada por:

   a) $f(x) = sen(x+3)$.
   b) $f(x) = cos^2(x^3)$.
   c) $f(x) = 1/cos(x)$.
   d) $f(x) = \sqrt{(1+x)/(1-x)}$.
   e) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.
   f) $f(x) = (\sqrt[3]{x} - 1/\sqrt[5]{x})^5$.
   g) $f(x) = cos(cos(cos(x)))$.
   h) $f(x) = x^4 e^x ln(x)$.
   i) $f(x) = x^x$.
   j) $f(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$.

6. Calcúlese la tangente de la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 40$ que es paralela al eje $0X$.

7. Calcúlese la tangente de la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto P en cada uno de los siguientes casos:

   a) $f(x) = x^2 + 1$ en el punto $P = (3, 10)$.
   b) $f(x) = cos(x)$ en el punto $P = (\pi/2, 0)$.
   c) $f(x) = |x|$ en el punto $P = (1, 1)$.
   d) $f(x) = x/x^2 + 1$ en el punto $P = (0, 0)$.

8. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Encuéntrense los valores de α y ,β que hacen que el punto $(2, 4)$ pertenezca a la gráfica de f y que la recta tangente a la misma en dicho punto sea la recta de ecuación $2x - y = 0$.

9. Sea $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{\ln(1 - senx) - 2ln(cosx)}{senx} \quad (x \neq 0) \qquad f(0) = a.$$

   Estúdiese para qué valor de a la función f es continua en cero.

10. Estúdiese la continuidad y la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[5]{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

11. Demuéstrese que, para cada $x > 0$, se verifica que

$$ln(1 + x) < x.$$

12. Calcúlese el número de ceros y la imagen de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

13. Calcúlese el número de soluciones de la ecuación $3lnx - x = 0$.

14. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Pruébese que la ecuación

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

tiene una solución real única.

15. Estúdiese el comportamiento de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

    a) $A = \mathbb{R}^*, \quad f(x) = sen(3x)/x \quad \forall x \in A, \quad \alpha = 0.$
    b) $A = \mathbb{R} \backslash \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad f(x) = (2x - \pi)/cos(x) \quad \forall x \in A, \quad \alpha = \pi/2.$
    c) $A = \mathbb{R} \backslash \{2, -2\}, \quad f(x) = (\sqrt{x^2 + 5} - 3)/x^2 - 4 \quad \forall x \in A, \quad \alpha = 2.$
    d) $A =]2, +\infty[\ , \quad f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}} \quad \forall x \in A, \quad \alpha = 2.$
    e) $A =]0, \pi/2[, \quad f(x) = (\frac{1}{tgx})^{senx}, \quad \alpha = \pi/2.$
    f) $A =]0, \pi/2[, \quad f(x) = (1 + senx)^{cotgx}, \quad \alpha = 0.$

16. Estúdiese el comportamiento en el punto cero de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

    a) $A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, \quad \forall x \in A.$
    b) $A = \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{1 - cosx}{x^2}, \quad \forall x \in A.$
    c) $A =]0, \pi/2[, \quad f(x) = (senx + cosx)^{1/x}, \quad \forall x \in A.$
    d) $A =]0, \pi/2[, \quad f(x) = \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \forall x \in A.$
    e) $A =]0, \pi/2[, \quad f(x) = (1 - tgx)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \forall x \in A.$
    f) $A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = x^{senx}, \quad \forall x \in A.$
    g) $A =]0, \pi/2[, \quad f(x) = \frac{x - arctgx}{sen^3 x}, \quad \forall x \in A.$

17. Estúdiense los siguientes límites funcionales:

    a) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{5x + 3}{2x^2 + 1},$
    b) $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 + 4}{x - 2}$
    c) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 4}{x - 2},$
    d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2 + 3e^x}{\sqrt{2 + 3x^2}},$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2+3e^x}{\sqrt{2+3x^2}}$.

18. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón, quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hállense las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse con ese procedimiento si el rectángulo tiene como lados 12 y 18.

19. Se inscribe un rectángulo en la elipse $x^2/400+y^2/225=1$ con sus lados paralelos a los ejes. Hállense las dimensiones del rectángulo para que **(a)** el área sea máxima, **(b)** el perímetro sea máximo.

20. Demuéstrese que la suma de un número positivo y su inverso es mayor o igual a 2.

21. Una persona desea cortar un pedazo de alambre de 1 $m.$ de largo en dos trozos. Uno de ellos se va a doblar en forma de circunferencia, y el otro en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortar el alambre para que la suma de áreas sea mínima?.

22. Un cultivador de naranjas estima que, si planta 60 naranjos, obtendrá una cosecha media de 400 naranjas por árbol. Este número bajará 4 unidades por cada árbol más que se plante en el mismo terreno. Hállese el número de árboles que hace máxima la cosecha.

23. Una fábrica de plásticos recibe del Ayuntamiento de la ciudad un pedido de 8.000 tablas flotadoras para el programa de natación del verano. La fábrica posee 10 máquinas, cada una de las cuales produce 50 tablas por hora. El coste de preparar las máquinas para hacer el trabajo es de 800 EUROS por máquina. Una vez que las máquinas están preparadas, la operación es automática y puede ser supervisada por una sóla persona, que gana 35 EUROS/hora.

    a) ¿Cuántas máquinas hay que usar para minimizar el coste de producción?

    b) Si se usa el número óptimo de máquinas, ¿cuánto ganará el supervisor durante el proceso?.

24. Las palomas domésticas no suelen volar sobre extensiones grandes de agua a menos que se vean forzadas a ello, posiblemente porque se requiera más energía para mantener la altitud sobre el agua fría. Supongamos que se suelta una paloma desde un barco situado a 3 km de la costa, siendo A el punto costero más cercano. El palomar se encuentra en un punto de la costa situado a 10 km de A. Si la paloma gasta dos veces más energía volando sobre el agua que sobre la tierra firme y sigue un camino que hace mínima la energía gastada, determínese el punto dónde la paloma abandona el agua.

25. Calcúlese $Max\{\sqrt[n]{n}: \quad n \in \mathbb{N}\}$.

1.3. Módulo: Cálculo integral

Sumario

En este módulo nos ocuparemos del concepto de función integrable, como una evolución natural del método de exhaución, usado por los griegos para calcular ciertas áreas, y estudiaremos sus propiedades. Enunciaremos la Regla de Barrow indispensable para el cálculo integral. Como aplicación, señalaremos el cáculo del área de una cierta región plana.

III.1 Funciones integrables.

III.2 Propiedades de las funciones integrables.

III.3 Cómo evaluar una integral: Regla de Barrow.

III.4 Integración de funciones racionales.

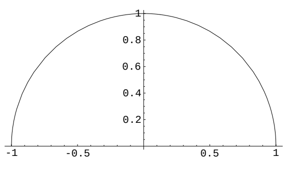
III.5 Integración de funciones no racionales.[III.6] Cálculo de áreas. [III.7] Relación de ejercicios.

1.3.1. Integral de una función.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua que toma sólo valores positivos. De forma intuiitva se puede definir $\int_a^b f(x)dx$ como el "área"del conjunto

$$R(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Consiérese por ejemplo la función $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Así pues, la integral $\int_{-1}^1 f(x)dx = \pi/2$ esto es, ela área del semicírculo siguiente



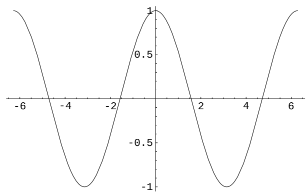
Si la función no es positiva, escribimos f como diferencia de dos funciones positivas, f^+ y f^- definidas por

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & si \;\; f(x) \geq 0 \\ 0 & si \;\; f(x) \leq 0 \end{cases}$$

y

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & si \;\; f(x) \leq 0 \\ 0 & si \;\; f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Si se considera por ejemplo la función $f(x) = cosx$ en en el intervalo $[-\pi, \pi]$,



la gráfica de la función f^+ coincide con la gráfica de f cuando ésta es positiva y con el eje x cuando es negativa. Por el contrario, la gráfica de la función f^- coincide con la **opuesta** (simétrica respecto del eje x) de la gráfica de f cuando f es negativa y con el eje x cuando es positiva. De esta forma $\int_a^b f(x)dx$ puede verse como

$$\int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx.$$

No será esta la técnica que usaremos para el cálculo integral. Para econtrar una técnica apropiada, recordamos primero algunas propiedades de la integral

Proposición 1.3.1. *Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]$. Entonces*

1.

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2. Para cada $r \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b (rf)(x)dx = r\int_a^b f(x)dx.$$

Finalmente también se verifica la propiedad de la aditividad respecto del intervalo, esto es,

Proposición 1.3.2. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y sea $c \in]a, b[$ y tal que f es continua en $[a, c]$ y $[c, b]$. Entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

1.3.2. Cómo evaluar una integral: Regla de Barrow.

El siguiente resultado, el cual es consecuencia del teorema del valor medio, es importantísimo ya que nos permitirá evaluar la integral de una función conocida su primitiva. Recordemos que dada una función f definida en un intervalo I se dice que f **admite primitiva** si existe una función derivable $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in I$, $G'(x) = f(x)$. Como consecuencia del teorema del Valor Medio, G está determinada de manera única, salvo una constante aditiva.

Teorema 1.3.3. *(Regla de Barrow)*
Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y supongamos que admite una primitiva G. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Por tanto, **el problema de evaluar la integral de una función continua f consiste en conseguir una primitiva de f susceptible de ser evaluada en los puntos a y b.**

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^1 (2x^3 + 1)\ dx.$$

A menudo conviene transformar la función f en otra función cuya primitiva sea más accesible; los siguientes resultados ofrecen algunas transformaciones interesantes.

Corolario 1.3.4. *(teorema del cambio de variable)*
Sea $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua y tal que $g'(x) \neq 0$. Si f es una función continua en $g([a, b])$, entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t)).g'(t)dt.$$

La regla formal seguida en el resultado anterior consiste en sustituir $g(t)$ por x y $g'(t)dt$ por dx y los valores extremos $t = a, t = b$ por los correspondientes $x = g(a), x = g(b)$.

Ejercicio:
Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^1\ 2xe^{x^2}\ dx.$$

La siguiente técnica es especialmente útil cuando se trata de **calcular la integral de un producto de funciones o de una función fácilmente derivable** (basta ver ésta como el producto de ella por la función constante uno).

Corolario 1.3.5. *(teorema de integración por partes)*
Sean $F, G : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables con derivada continua en clase $[a,b]$. Entonces

$$\int_a^b F(x).G'(x)dx = F(b).G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F'(x).G(x)dx.$$

Ejercicio: Calcúlense las siguientes integrales:

$$\int_1^2 ln(x)dx \quad \text{y} \quad \int_0^1 x^2 sen(x)dx.$$

1.3.3. Métodos de integración

Integración de funciones racionales

Daremos un método para integrar $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función racional de uno los siguientes tipos:

Tipo 1

$$f(x) = \frac{1}{x-c},$$

para todo $x \in [a,b]$, y donde $A, c \in \mathbb{R}$ y c no pertenece al intervalo $[a,b]$. En tal caso tenemos que una primitiva de f es $ln|x-c|$, y por tanto:

$$\int_a^b f(x)dx = ln(\frac{b-c}{a-c}).$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{2-x^2}{x^3-3x^2+2x}dx,$$

sabiendo que $\frac{2-x^2}{x^3-3x^2+2x} = ...$

Tipo 2

$$f(x) = \frac{1}{(x-c)^n},$$

para todo $x \in [a,b]$, y donde $c \in \mathbb{R}$ y c no pertenece al intervalo $[a,b]$. En tal caso tenemos que una primitiva de f es $\frac{1}{n-1}(\frac{1}{(x-c)^{n-1}})$, y por tanto:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{n-1}[\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}}].$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^{1/2} \frac{2x}{x^2 - 2x + 1} dx.$$

Tipo 3

$$f(x) = \frac{Bx + C}{x^2 + cx + d},$$

para todo $x \in [a, b]$, donde $B, C, c, d \in \mathbb{R}$. En este caso se procede de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{B}{2} \int_a^b \frac{2x + c}{x^2 + cx + d} dx + (C - cB/2) \int_a^b \frac{dx}{x^2 + cx + d}.$$

La primera integral se puede resolver haciendo el cambio de variable $u = x^2 + cx + d$, con lo que nos queda

$$\int_{a^2+ac+d}^{b^2+bc+d} \frac{du}{u} = ln \frac{b^2 + bc + d}{a^2 + ac + d}.$$

La segunda integral se puede resolver escribiendo $x^2 + cx + d = (x - r)^2 + b^2$ para hacer el cambio de variable $u = \frac{x-r}{s}$, con lo que nos queda

$$\frac{1}{s} \int_{\frac{a-r}{s}}^{\frac{b-r}{s}} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{s}[arc\ tg(\frac{b - r}{s}) - arc\ tg(\frac{a - r}{s})].$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{2x - 1}{x^4 + x^3 - x - 1} dx.$$

Integración de funciones no racionales

El problema de evaluar funciones no racionales se llevará a cabo utilizando diversos cambios de variable hasta conseguir que la nueva función a integrar sea racional. No hay un método general para ello, sino un recetario más o menos amplio, de hecho, la simple inspección del integrando sugiere el cambio de variable adecuado.

1. Funciones trigonométricas

   Sea f una función que es cociente de sumas y productos de las funciones seno y coseno. Dado que f es una función periódica de periodo 2π podremos limitarnos a considerar $I \subseteq [-\pi, \pi]$. Hacemos en este caso el cambio de variable
   $$x = g(t) = 2arctg(t).$$
   La función g que aparece es una función racional. De hecho,
   $$cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \text{ y } sen(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

   Ejercicio: Calcúlese $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{sen(x)}$

   Podemos destacar el casos particular
   $$\int_a^b \frac{sen^n(x)}{cos^m(x)} dx \qquad a, b \in I$$
   con n y m pares. En tal caso se usan las fórmulas
   $$cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2}, \quad sen^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2}.$$

2. Funciones trascendentes

   Sea f una función f que es cociente de sumas y productos de la función e^x con ella misma. Hacemos en este caso el cambio de variable $x = g(t) = ln(t)$. La función h que aparece es de nuevo una función racional.

   Ejercicio: Calcular $\int_1^2 \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$

3. Irracionales en x

Sea f una función que es cociente de sumas y productos de potencias racionales de x. Si $f(x) = F(x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, ..., x^{\frac{p_n}{q_n}})$, entonces hacemos el cambio de variable $x = t^m$, donde $m = m.c.m.\{q_1, q_2, ..., q_n\}$. Así pues, la función a integrar que resulta después del cambio es una función de tipo racional, que ya sabemos resolver.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx.$$

4. Irracionales cuadráticas

Vamos a ocuparnos de funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones x y $\sqrt{1-x^2}$

En este caso, siempre que $[a, b] \subseteq [-1, 1]$ hacemos el cambio de variable $x = g(t) = sen(t)$ y por tanto la función h que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

1.3.4. Cálculo del área de un recinto plano

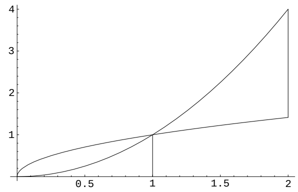
De manera más general, dadas $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables, verificando que, para cada $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ podemos considerar el recinto

$$R(f, g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Es ahora fácil probar que el área de dicho recinto $A(R(f, g)))$, verifica

$$A(R(f, g)) = |\int_a^b (f(x) - g(x))dx|.$$

Considérense por ejemplo las funciones $f, g : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, y el recinto $R(f, g)$, comprendido entre las correspondientes gráficas



Es claro que área de dicho recinto $A(R(f,g)))$, verifica

$$A(R(f,g)) = |\int_0^1 (x^2 - \sqrt{x})dx| + |\int_1^2 (x^2 - \sqrt{x})dx| = 3 - 4/3\sqrt{2}.$$

1.3.5. Relación de ejercicios

1) Calcúlense las siguientes integrales:
   a' $\int_0^1 arctg(x)\ dx$
   b' $\int_0^1 x^2 e^x\ dx$
   c' $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(ln(x))^2}$
   d' $\int_0^{\pi/4} sen^2 x\ cos^3 x\ dx,$
   e' $\int_{\pi/4}^{\pi/2} cosx\ \ln(senx)\ dx,$
   f' $\int_0^{\pi/4} \dfrac{senx}{cos^2 x}\ dx.$
   g' $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{senx - tgx}.$
   h' $\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2+cosx}.$
   i' $\int_1^{3/2} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}.$
2) Pruébense las siguientes igualdades:
   a' $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2},$
   b' $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\ dx}{\sqrt{1-senx}} = 2,$
   c' $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{2},$
   d' $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}\ dx}{\sqrt{x}} = 2,$
   e' $\int_0^1 ln(x)\ dx = -1$

1.- Calcúlense las siguientes áreas:
   a) Area limitada por las curvas $y = x^2$ y $y^2 = 8x$
   b) Area limitada por $y = xe^{-x^2}$, el eje x, la recta $x = 0$ y la la recta $x = a$, donde a es la abscisa del punto donde la función $f(x) = xe^{-x^2}$ alcanza el máximo.

c) Area de la figura limitada por la curva $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje x.

d) Area comprendida entre la curva $y = \mathrm{tg}(x)$, el eje OX y la recta $x = \pi/3$.